

Παρατήρηση. Από τον Πίνακα 2.1.3 παίρνουμε δύο τιμές του ενός ποσού (αριθμός εργατών), π.χ. τις 2 και 3, και σχηματίζουμε το λόγο τους $2/3$. Έπειτα παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές (120 και 80) του άλλου ποσού (χρόνος σε ώρες) και σχηματίζουμε το λόγο τους $120/80 = 12/8$. Συγκρίνοντας τώρα τους δύο λόγους παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{12}{8}$$

Εάν όμως αντιστρέψουμε το λόγο $\frac{12}{8}$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Δύο ποσά είναι αντίστροφα, αν ο λόγος δύο τιμών του ενός ποσού είναι ίσος με τον αντίστροφο λόγο των αντίστοιχων τιμών του άλλου ποσού.

2.2. Απλή μέθοδος των τριών

Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα

Πρόβλημα 1ο. Τα 12 μέτρα ενός υφάσματος κοστίζουν 480 €. Πόσο κοστίζουν τα 8 μέτρα του ίδιου υφάσματος;

Κατάταξη:

Λύση.

Τα 12 μέτρα κοστίζουν 480 €

Τα 8 μέτρα κοστίζουν x; €

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «μήκος» και «κόστος» είναι **ποσά ανάλογα**, διπλάσια, τριπλάσια, κτλ., μέτρα κοστίζουν διπλάσιες, τριπλάσιες, κτλ, δραχμές. Συνεπώς, ο λόγος $12/8$ των τιμών 12 και 8 του ποσού «μήκος σε μέτρα» είναι ίσος με το λόγο $480/x$ των αντίστοιχων τιμών 480 και x του ποσού «κόστος σε €».

Δηλαδή ισχύει η αναλογία:



$$\frac{12}{8} = \frac{480}{x}$$

Λύνοντας ως προς x έχουμε:

$$12 \cdot x = 480 \cdot 8 \Rightarrow x = 480 \cdot \frac{8}{12} = 320$$

Ωστε: Τα 8 μέτρα κοστίζουν 320 €.

Πρόβλημα 2ο. Δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες, για να τελειώσουν ένα έργο. Σε πόσες ώρες θα τελειώσουν το ίδιο έργο 12 εργάτες; (Οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση).

Κατάταξη:

Λύση.

Οι 10 εργάτες τελειώνουν το έργο σε 2400 ώρες
 Οι 12 εργάτες τελειώνουν το έργο σε x ; ώρες

Στο πρόβλημα αυτό, τα ποσά «αριθμός εργατών» και απαιτούμενος «χρόνος» εκτέλεσης του έργου είναι **ποσά αντίστροφα**, διότι, αφού οι δέκα εργάτες χρειάζονται 2400 ώρες για να τελειώσουν το έργο, οι διπλάσιοι εργάτες θα τελειώσουν το έργο στο μισό του χρόνου και οι τριπλάσιοι εργάτες στο τρίτο του χρόνου. Συνεπώς, ο λόγος 10/12 των τιμών 10 και 12 του ποσού «αριθμός εργατών» είναι ίσος με τον **αντίστροφο λόγο** $x/2400$ των αντίστοιχων τιμών 2400 και x του ποσού «χρόνος» σε ώρες. Δηλαδή, ισχύει η εξής αναλογία:

$$\frac{10}{12} = \frac{x}{2400}$$

Λύνοντας ως προς x έχουμε:

$$12 \cdot x = 10 \cdot 2400 \Rightarrow x = 2400 \cdot \frac{10}{12} = 2000$$

Άρα: Οι 12 εργάτες θα τελειώσουν το έργο σε 2000 ώρες.

Από τη λύση των προβλημάτων 1 και 2 παρατηρούμε τα εξής:

Παρατήρηση 1η. Στα προβλήματα αυτά (και τα όμοια με αυτά), δίνονται **τρεις αριθμοί** και ζητείται να βρεθεί **τέταρτος** ($= x$). Γι' αυτό το λόγο ο γενικός τρόπος με τον οποίο λύνονται όλα τα προβλήματα αυτού του είδους, ονομάστηκε **απλή μέθοδος των τριών**.

Παρατήρηση 2η. Για τη λύση προβλημάτων με την απλή μέθοδο των τριών πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν τα συμπλεκόμενα ποσά είναι **ανάλογα** ή **αντίστροφα** και έπειτα να εφαρμόσουμε τον ακόλουθο πρακτικό κανόνα:



Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x , σε ένα πρόβλημα της απλής μεθόδου των τριών, πολλαπλασιάζουμε τον υπεράνω του άγνωστου x αριθμό επί το σχηματιζόμενο κλάσμα των γνωστών τιμών αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα, και όπως είναι στην κατάταξη, αν τα ποσά είναι αντίστροφα.

Πρόβλημα 3ο. Τα 10 κιλά ενός εμπορεύματος αξίζουν 8000 €. Πόσα ευρώ αξίζουν τα 16 κιλά;

Κατάταξη:

Λύση.

Τα 10 κιλά αξίζουν 8000 €

Τα 16 κιλά αξίζουν x ; €

Αφού τα 10 κιλά αξίζουν 8000 €, τα διπλάσια κιλά αξίζουν διπλάσια ευρώ. Επομένως, τα ποσά «βάρος» σε κιλά και «αξία» σε € είναι **ανάλογα**. Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε:

$$x = 8000 \cdot \frac{16}{10} = 12800$$

Άρα: τα 16 κιλά αξίζουν 12800 €.

Πρόβλημα 4ο. Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 75km/h διανύει την απόσταση: Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 8 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα διανύσει την ίδια διαδρομή σε 10 ώρες; (Υποθέτουμε ότι το αυτοκίνητο τρέχει με μια σταθερή ταχύτητα ή όπως λέμε με μια μέση ταχύτητα).

Κατάταξη:

Λύση.

Με ταχύτητα 75km/h κάνει 8 ώρες

Με ταχύτητα x ;km/h κάνει 10 ώρες

Αφού με ταχύτητα 75km/h το αυτοκίνητο κάνει τη διαδρομή σε 8 ώρες, για να διανύσει την ίδια απόσταση σε διπλάσιες ώρες πρέπει να τρέχει με τη μισή ταχύτητα από την προηγούμενη. Άρα, τα ποσά «ταχύτητα» και «χρόνος» είναι **αντίστροφα**. Συνεπώς θα έχουμε:

$$x = 75 \cdot \frac{8}{10} = \frac{600}{10} = 60 \text{ km/h}$$

Ωστε: Το αυτοκίνητο πρέπει να τρέχει με (μέση) ταχύτητα 60 km/h, για να διανύσει την απόσταση Αθήνα - Θεσ/νίκη σε 10 ώρες.

Προβλήματα απλής μεθόδου των τριών



- Τα 23 μέτρα ενός υφάσματος αξίζουν 25,3 €. Πόσα ευρώ αξίζουν τα 15 μέτρα;
(Απ. 16,5)
- Δέκα εργάτες σκάβουν σε 28 ημέρες ένα κτήμα. Πόσοι εργάτες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα σε 8 ημέρες;
(Απ. 35)
- Με 45 € αγοράζουμε 3 κιλά καφέ. Πόσα κιλά καφέ θα αγοράσουμε με 1230 €;
(Απ. 82)
- Ένας οικοδόμος σε μια εβδομάδα (= 6 ημέρες) παίρνει 240 €. Πόσες δραχμές θα πάρει για 15 ημέρες εργασίας;
(Απ. 600)
- Ένα αυτοκίνητο με 45 λίτρα βενζίνης διανύει 450 χιλιόμετρα. Αν τώρα τρέχει με την ίδια ταχύτητα, πόσα χιλιόμετρα θα διανύσει με 35 λίτρα;
(Απ. 350)
- Ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα 80km/h κάνει τη διαδρομή «Αθήνα - Πάτρα» σε 3 ώρες. Με πόση ταχύτητα θα κάνει την ίδια διαδρομή σε 6 ώρες;
(Απ. 40 km/h)
- Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 15 € το μέτρο. Τα 2/3 του υφάσματος - τα πούλησε προς 25 € το μέτρο και το υπόλοιπο προς 12 € το μέτρο και κέρδισε συνολικά 1700 €. Πόσα μέτρα ύφασμα είχε αγοράσει;
(Απ. 300)

8. Ένας έμπορος αγόρασε μοκέτα προς 7 € το μέτρο. Πούλησε τα $\frac{5}{8}$ της μοκέτας προς 8 € το μέτρο και το υπόλοιπο προς 7,5 € το μέτρο, και κέρδισε συνολικά 650 €. Πόσα μέτρα είχε αγοράσει;
(Απ. 800)
9. 240 κατασκηνωτές έχουν τρόφιμα για 30 ημέρες. Έπειτα από 10 ημέρες ήλθαν στην κατασκήνωση 60 τουρίστες χωρίς τρόφιμα. Πόσες ημέρες θα επαρκέσουν τα τρόφιμα;
(Απ. 16)
- 10 Σε ένα κάστρο ήταν πολιορκημένοι 1000 άνθρωποι και είχαν τρόφιμα για 54 ημέρες. Έπειτα από 18 ημέρες έφτασαν στο κάστρο άλλοι 500 άνθρωποι. Σε πόσες ημέρες θα εξαντληθούν τα τρόφιμα;
(Απ. 42)
- 11 Οκτώ άνδρες ή δώδεκα παιδιά εκτελούν ένα έργο σε 30 ημέρες. Έξι άνδρες ή έντεκα παιδιά σε πόσες ημέρες θα εκτελέσουν το ίδιο έργο;
(Απ. 18)
12. Ένας χονδρέμπορος αγόρασε πατάτες προς 4 € το κιλό πουλάει τα $\frac{6}{9}$ τους προς 6 € το κιλό και τις υπόλοιπες προς 5 € το κιλό και κερδίζει 25.000 €. Πόσους τόνους είχε αγοράσει;
(Απ. 15)
13. Ένας έμπορος πούλησε λάδι και κέρδισε ποσό ίσο προς τα $\frac{10}{94}$ της τιμής πώλησής του. Αν όμως κέρδιζε 340 € περισσότερα, το κέρδος θα ήταν ίσο προς το $\frac{1}{5}$ της τιμής αγοράς του λαδιού. Να βρεθεί: α) η τιμή πώλησης του λαδιού, β) το κέρδος που είχε από την πώληση και γ) το βάρος του λαδιού, αν με το κέρδος που πραγματοποίησε αγόραζε 20 κιλά λαδιού.
(Απ. α) 4700 €, β) 500 €, γ) 168 κιλά)
14. Ένας έμπορος αγόρασε ύφασμα προς 420 € το μέτρο. Πούλησε τα $\frac{2}{5}$ της ποσότητας προς 500 € το μέτρο και τα υπόλοιπα προς 350 € το μέτρο. Αν ζημιώθηκε 5000 €, πόσα μέτρα είχε αγοράσει;
(Απ. 500)

2.3. Σύνθετη Μέθοδος των τριών

Προβλήματα με ποσά ανάλογα και ποσά αντίστροφα

Πρόβλημα 1ο. Δέκα εργάτες, όταν εργαστούν 8 ημέρες, παίρνουν 3.600 €. Πόσα ευρώ θα πάρουν 14 εργάτες, αν εργαστούν 16 ημέρες;

Λύση. Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

$$\begin{array}{l} 10 \text{ εργάτες σε } 8 \text{ ημέρες παίρνουν } 3.600 \text{ €} \\ 14 \text{ εργάτες σε } 16 \text{ ημέρες παίρνουν } x; \text{ €} \end{array}$$

Σύγκριση ποσών. α) Τα ποσά «εργάτες» και «ευρώ» είναι **ανάλογα**, διότι διπλάσιοι εργάτες για τον ίδιο χρόνο εργασίας θα πάρουν διπλάσια ευρώ. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ευρώ» είναι **αντίλογα**, διότι σε διπλάσιες ημέρες οι ίδιοι εργάτες θα πάρουν διπλάσια ευρώ. Παρατηρούμε ότι κάθε ποσό συγκρίνεται με το ποσό του αγνώστου.

Το πιο πάνω πρόβλημα αναλύεται σε δύο προβλήματα της απλής μεθόδου των τριών.

1α) Οι 10 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν 3.600 €. Οι 14 εργάτες πόσα ευρώ θα πάρουν;

Κατάταξη:

$$\begin{array}{l} \text{Οι } 10 \text{ εργάτες σε } 8 \text{ ημέρες παίρνουν } 3.600 \text{ €} \\ \text{Οι } 14 \text{ εργάτες σε } 8 \text{ ημέρες παίρνουν } x; \text{ €} \end{array}$$

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ευρώ» είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$x = 3.600 \cdot \frac{14}{10} \text{ €}$$

Ωστε: Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν

$$3.600 \cdot \frac{14}{10} \text{ €}$$

1β) Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 8 ημέρες, θα πάρουν $3.600 \cdot 14/10$ ευρώ. Πόσα ευρώ θα πάρουν, αν εργαστούν 16 ημέρες;

Κατάταξη:

Οι 14 εργάτες σε 8 ημέρες παίρνουν $3.600 \cdot \frac{14}{10}$ €

Οι 14 εργάτες σε 16 ημέρες παίρνουν x ; €

Επειδή τα ποσά «ημέρες» και «ευρώ» είναι ανάλογα, θα έχουμε:

$$x = 3.600 \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{16}{8} = 10.080 \text{ €} \quad (E_1)$$

Ώστε: Οι 14 εργάτες, αν εργαστούν 16 ημέρες, θα πάρουν 10.080 ευρώ.

Πρόβλημα 2ο. Δεκαπέντε εργάτες σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Σε πόσες ημέρες 20 εργάτες θα σκάψουν κτήμα 60 στρεμμάτων;

Λύση. Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο, ως εξής:

Οι 15 εργάτες σε 40 ημέρες σκάβουν 40 στρέμματα

Οι 20 εργάτες σε x ; ημέρες σκάβουν 60 στρέμματα

Σύγκριση ποσών, α) Τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι **αντίστροφα**, διότι διπλάσιοι εργάτες θα σκάψουν το κτήμα σε μισές ημέρες (αν όλοι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση και εργάζονται, π.χ., 8 ώρες την ημέρα), β) Τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι **ανάλογα**, διότι ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σκάβεται από κάποιο αριθμό εργατών σε 40 ημέρες· άλλο κτήμα, με διπλάσιο αριθμό στρεμμάτων, σκάβεται, από τους ίδιους εργάτες, σε διπλάσιο αριθμό ημερών.

Το πιο πάνω πρόβλημα μπορεί να αναλυθεί στα ακόλουθα δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών:

2α) Οι 15 εργάτες σκάβουν ένα κτήμα (40 στρεμμάτων) σε 40 ημέρες. Οι 20 εργάτες σε πόσες ημέρες θα σκάψουν το ίδιο κτήμα;

Κατάταξη:

Οι 15 εργάτες σκάβουν το κτήμα σε 40 ημέρες

Οι 20 εργάτες σκάβουν το κτήμα σε x ; ημέρες

Επειδή, όπως είπαμε, τα ποσά «εργάτες» και «ημέρες» είναι αντίστροφα, θα έχουμε:

$$x = 40 \cdot \frac{15}{20} \text{ ημέρες}$$

Ωστε: Οι 20 εργάτες θα σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων σε $40 \cdot \frac{15}{20}$ ημέρες

2β) Οι 20 εργάτες, για να σκάψουν το κτήμα των 40 στρεμμάτων, χρειάζονται $40 \cdot \frac{15}{20}$ ημέρες. Πόσες ημέρες θα χρειαστούν (οι ίδιοι εργάτες), για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων;

Κατάταξη:

Οι 20 εργάτες για 40 στρέμματα χρειάζονται $40 \cdot \frac{15}{20}$ ημέρες

Οι 20 εργάτες για 60 στρέμματα χρειάζονται x ; ημέρες

Επειδή τα ποσά «στρέμματα» και «ημέρες» είναι, όπως είπαμε, ανάλογα θα είναι:

$$x = 40 \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{60}{40} = 45 \text{ ημέρες} \quad (E_2)$$

Ωστε: Οι 20 εργάτες, θα χρειαστούν 45 ημέρες, για να σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων.

Όπως βλέπουμε, για να λύσουμε τα δύο προηγούμενα προβλήματα, αναλύσαμε το καθένα σε δύο προβλήματα απλής μεθόδου των τριών. Γι' αυτό το λόγο, τα προβλήματα τέτοιου είδους ονομάζονται **προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών**.

Από τα τελικά εξαγόμενα (E_1) και (E_2) των πιο πάνω προβλημάτων προκύπτει ο ακόλουθος γενικός κανόνας:

Για να βρούμε την τιμή του άγνωστου x , πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό που είναι πάνω από τον άγνωστο x με καθένα από τα κλάσματα που σχηματίζονται από τις δύο άλλες τιμές κάθε ποσού, αντεστραμμένο, αν τα ποσά είναι ανάλογα προς το ποσό του x , όπως είναι το κλάσμα, αν τα ποσά είναι αντίστροφα προς το ποσό του αγνώστου.



Πρόβλημα 3ο. Δέκα εργάτες, εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα παίρνουν σε 20 ημέρες 8.000 €. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργαστούν 8 εργάτες για να πάρουν σε 15 ημέρες 6.000 €;

Λύση. Κατατάσσουμε τα ομοειδή ποσά το ένα κάτω από το άλλο:

Οι 10 εργάτες με 8 ώρες την ημέρα παίρνουν σε 20 ημ. 8.000 €
 Οι 8 εργάτες με x ; ώρες την ημέρα παίρνουν σε 15 ημ. 6.000 €

Σύγκριση ποσών, α) Τα ποσά «εργάτες» και «ώρες» είναι αντίστροφα, διότι ο μισός αριθμός εργατών τελειώνει το ίδιο έργο σε διπλάσιες ώρες. β) Τα ποσά «ημέρες» και «ώρες» είναι **αντίστροφα**, διότι σε μισό αριθμό ημερών θα χρειαστούν διπλάσιες ώρες, για να τελειώσουν το έργο οι ίδιοι εργάτες. γ) Τα ποσά «αμοιβή» σε € και «ώρες εργασίας» είναι ανάλογα, διότι για διπλάσιες ώρες, οι ίδιοι εργάτες, παίρνουν διπλάσια αμοιβή. Συνεπώς, σύμφωνα με τον πιο πάνω κανόνα θα έχουμε:

$$x = 8 \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{6.000}{8.000} = 10 \text{ ώρες}$$

Ώστε: Οι 8 εργάτες, για να πάρουν 6.000 € σε 15 ημέρες, πρέπει να εργάζονται 10 ώρες την ημέρα.



Προβλήματα σύνθετης μεθόδου των τριών

1. Δεκαέξι εργάτες σε δώδεκα ημέρες σκάβουν ένα αγρόκτημα είκοσι τεσσάρων στρεμμάτων. Σε πόσες ημέρες είκοσι εργάτες θα σκάψουν αγρόκτημα δέκα στρεμμάτων; **(Απ. 4)**

2. Διακόσιοι στρατιώτες χρειάζονται 400 κιλά ψωμί, για να περάσουν 4 ημέρες. Πόσα κιλά ψωμί θα χρειαστούν 350 στρατιώτες, για να περάσουν 14 ημέρες; **(Απ. 2450)**
3. Για εργασία 8 ημερών 10 εργάτες πήραν 3.200 €. Πόσα ευρώ θα πάρουν 12 εργάτες, αν εργαστούν 14 ημέρες; **(Απ. 6.720)**
4. Δεκαπέντε εργάτες εργαζόμενοι 8 ώρες την ημέρα, σκάβουν ένα κτήμα 40 στρεμμάτων σε 40 ημέρες. Είκοσι εργάτες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, σε πόσες ημέρες θα σκάψουν ένα κτήμα 60 στρεμμάτων; **(Απ. 36)**
5. Ένα εξοχικό σπίτι συμφωνήθηκε να κατασκευαστεί από 9 εργάτες σε 16 ημέρες. Οι εργάτες όμως σε 6 ημέρες, εργαζόμενοι 10 ώρες την ημέρα, κατασκεύασαν το ένα τρίτο του σπιτιού. Πόσες ώρες την ημέρα πρέπει να εργαστούν οι ίδιοι εργάτες τις υπόλοιπες ημέρες, για να τελειώσουν το σπίτι σε 16 ημέρες, όπως είχαν συμφωνήσει; **(Απ. 12 ωρ/ημ.)**
6. Με 36 κιλά νήματος υφαίνουμε 54 μέτρα υφάσματος πλάτους 0,80m. Με 50 κιλά νήματος πόσα μέτρα θα υφάνουμε, αν τώρα το πλάτος του υφάσματος είναι 1,20m; **(Απ. 50m)**
7. Είκοσι τέσσερις εργάτες μπορούν να εκτελέσουν ένα έργο σε 28 ημέρες, αν εργάζονται 7 ώρες την ημέρα. Μετά 10 ημέρες εργασίας 6 εργάτες αρρώστησαν· οι υπόλοιποι αύξησαν την εργασία τους κατά μία ώρα την ημέρα. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το έργο και τι ποσό θα πάρει ο καθένας, αν πληρωθούν 70.560 € για ολόκληρο το έργο. **(Απ. 21 ημ. -1050 - 3570)**
8. Ένα πλοίο έχει πλήρωμα 140 ανδρών και τρόφιμα για 70 ημέρες. Μετά από ταξίδι 10 ημερών παρέλαβε ναυαγούς και ο χρόνος του ταξιδιού αυξήθηκε κατά 10 ημέρες. Ελαττώθηκε τότε η μερίδα κατά $\frac{2}{5}$ της αρχικής. Πόσους ναυαγούς παρέλαβε; **(Απ. 60)**
9. Εργολάβος ανέλαβε να εκτελέσει μια εργασία σε τριάντα ημέρες υπολογίζοντας να μισθώσει δύο εκσκαφείς, οι οποίοι θα εργάζονται