ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

3.1. Αριθμοί: ανάλογοι προς άλλους, αντίστροφοι και αντιστρόφως ανάλογοι

Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς: 2, 3, 5

Αν πολλαπλασιάσουμε τους πιο πάνω αριθμούς επί τον ίδιο αριθμό, π.χ. επί 5, τότε προκύπτουν οι αριθμοί: 10, 15, 25.

Οι αριθμοί 10, 15, 25 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 2, 3, 5.

Αν τώρα οι αριθμοί 10, 15, 25 πολλαπλασιαστούν επί τον αριθμό 1/5, τότε προκύπτουν οι αριθμοί:

$$10 \cdot \frac{1}{5} = 2, \quad 15 \cdot \frac{1}{5} = 3, \quad 25 \cdot \frac{1}{5} = 5$$

Οι αριθμοί 2, 3, 5 λέγονται **ανάλογοι** προς τους αριθμούς 10, 15, 25, διότι προκύπτουν από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.

Ώστε: **Δύο ή περισσότεροι αριθμοί λέγονται ανάλογοι προς άλλους, αν γίνονται από αυτούς όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό.**

Π.χ. οι αριθμοί 28, 40, 48 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 7, 10, 12, γιατί προκύπτουν από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον αριθμό 4, αλλά και οι αριθμοί 7, 10, 12 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 28, 40, 48, γιατί γίνονται από αυτούς, όταν πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό 1/4.

Από τα πιο πάνω παραδείγματα παρατηρούμε ότι:

Ο αριθμός 28 προκύπτει από τον αριθμό 7, όταν πολλαπλασιαστεί με 4, αλλά και ο 7 προκύπτει από τον 28, όταν πολλαπλασιαστεί με 1/4.

Οι αριθμοί 7 και 28 λέγονται **ομόλογοι** αριθμοί. Επίσης, οι αριθμοί 10 και 40, καθώς και οι 12 και 48 είναι ομόλογοι αριθμοί.

Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύουν οι αναλογίες:

$$\frac{7}{28}=\frac{1}{4} \qquad \frac{10}{40}=\frac{1}{4} \qquad \frac{12}{48}=\frac{1}{4}$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι:

Αν οι αριθμοί x, ψ, ω, ... είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, ..., τότε ο λόγος των ομόλογων αριθμών είναι ο ίδιος για όλους.

Δηλαδή, αν x, ψ, ω είναι αριθμοί ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\lambda$$

Από αυτή τη σχέση έχουμε:

$$x=\lambda\cdot\alpha, \quad \psi=\lambda\cdot\beta, \quad \omega=\lambda\cdot\gamma$$

Αν το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με τη μονάδα, τότε οι αριθμοί λέγονται **αντίστροφοι.** Π.χ., οι αριθμοί 6 και 1/6 είναι αντίστροφοι, διότι $6 \cdot 1/6 = 1$. Επίσης, το κλάσμα 4/8 έχει αντίστροφο το κλάσμα 8/4, διότι $4/8 \cdot 8/4 = 1$.

Αν τώρα δύο ή περισσότεροι αριθμοί είναι ανάλογοι προς τους αντίστροφούς τους, τότε οι αριθμοί αυτοί λέγονται **αντιστρόφως ανάλογοι** προς άλλους ισοπληθείς.

Έστω π.χ. οι αριθμοί 3, 4, 5. Οι αντίστροφοί τους είναι: 1/3, 1/4, 1/5. Οι αριθμοί 12, 16, 20 είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3, 4, 5 αλλά αντιστρόφως ανάλογοι προς τους 1/3, 1/4, 1/5.

3.2. Προβλήματα μερισμού

3.2.1. Μερισμός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα

Μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ είναι η εύρεση άλλων αριθμών x, ψ, ω,... τέτοιων, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\ldots \quad \mu\varepsilon \quad x+\psi+\omega=M$$

Ο αριθμός Μ τον οποίο θέλουμε να μερίσουμε, λέγεται **μεριστέος** αριθμός. Από τις ιδιότητες των αναλογιών είναι γνωστό ότι αν οι αριθμοί x, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς α, β, γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\ldots=\frac{x+\psi+\omega+\ldots}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}=\frac{M}{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}=\lambda$$

Λύνοντας ως προς x, ψ, ω βρίσκουμε ότι

$$x=\lambda\cdot\alpha \qquad \psi=\lambda\cdot\beta \qquad \omega=\lambda\cdot\gamma$$

Από τα παραπάνω συνάγουμε τον ακόλουθο κανόνα:

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς άλλους αριθμούς α, β, γ, ..., διαιρούμε το μεριστέο αριθμό Μ με το άθροισμα α + β + γ + ... και με το πηλίκο (= λ) πολλαπλασιάζουμε καθέναν από τους αριθμούς α, β, γ...

Παράδειγμα. Να μεριστεί ο αριθμός 1000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 2, 3 και 5.

Εάν x, ψ, ω είναι οι άγνωστοι αριθμοί που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 2, 3, 5, τότε θα έχουμε x + ψ + ω = 1000 και επειδή οι x, ψ, ω είναι ανάλογοι προς τους 2, 3 και 5, θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{x}{2}=\frac{\psi}{3}=\frac{\omega}{5}=\frac{x+\psi+\omega}{2+3+5}=\frac{1000}{10}=100$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\frac{x}{2}=100 \text{ και } x=200,\ \frac{\psi}{3}=100 \text{ και } \psi=300,\ \frac{\omega}{5}=100 \text{ και } \omega=500.$$

Επαλήθευση: $x+\psi+\omega=200+300+500=1000.$

3.2.2. Μερισμός σε μέρη ανάλογα ακέραιων αριθμών

Πρόβλημα 1ο. Ένας εργολάβος οικοδομών χρησιμοποίησε (στο ίδιο χρονικό διάστημα) τέσσερις εργάτες, για να σκάψουν ένα πηγάδι και πλήρωσε με τα εξής ημερομίσθια: Ο Α εργάτης πήρε 55 €, ο Β εργάτης πήρε 65 €, ο Γ πήρε 50 € και ο Δ 70 € ο εργολάβος έδωσε συνολικά 4.800 €. Πόσα € θα πάρει ο κάθε εργάτης;

Λύση. Για να βρούμε το μερίδιο κάθε εργάτη, θα πρέπει να μοιράσουμε το ποσό των 4.800 € σε μέρη ανάλογα των ημερομισθίων των εργατών, δηλαδή σε μέρη ανάλογα των αριθμών:

$$55,\ 65,\ 50,\ 70$$

Το άθροισμα των ημερομισθίων είναι:

$$55 + 65 + 50 + 70 = 240 = \text{Α} + \text{Β} + \Gamma + \Delta$$

Το μεριστέο ποσό είναι 4.800 = Μ

Αν τώρα παραστήσουμε με φ, x, ψ, ω τα τέσσερα μερίδια, θα είναι:

$\varphi + x + \psi + \omega = 4.800$ και ισχύει η σχέση:

$$\frac{\varphi}{55} = \frac{x}{65} = \frac{\psi}{50} = \frac{\omega}{70} = \frac{\varphi + x + \psi + \omega}{55 + 65 + 50 + 70} = \frac{4.800}{240} = 20$$

Άρα: $\frac{\varphi}{55} = 20$ και $\varphi = 1.100$, $\frac{x}{65} = 20$ και $x = 1.300$

$$\frac{\psi}{50} = 20 \text{ και } \psi = 1.000, \quad \frac{\omega}{70} = 20 \text{ και } \omega = 1.400$$

Ώστε: Ο Α εργάτης θα πάρει 1.100 €
Ο Β εργάτης θα πάρει 1.300 €
Ο Γ εργάτης θα πάρει 1.000 €
Ο Δ εργάτης θα πάρει 1.400 €

Σύνολο: 4.800 €

Πρόβλημα 2ο. Ένα φιλανθρωπικό σωματείο θέλει να μοιράσει 15.000 € σε τρεις πτωχές οικογένειες ανάλογα με τα άτομα κάθε οικογένειας. Η α' οικογένεια έχει 4 άτομα, η β' 6 άτομα και η γ' 10 άτομα. Πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια;

Λύση. Μεριστέος = 15.000, α = 4, β = 6, γ = 10

Για να βρούμε πόσα χρήματα θα πάρει κάθε οικογένεια, θα πρέπει να μερίσουμε τον αριθμό 15.000 σε μέρη ανάλογα των αριθμών 4, 6, 10.

Πρακτικός κανόνας μερισμού:

Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, ..., πολλαπλασιάζουμε το μεριστέο αριθμό Μ με καθέναν από τους αριθμούς α, β, γ, ... και το γινόμενο το διαιρούμε με το άθροισμα α + β + γ + ...

Δηλαδή, ο μερισμός γίνεται με βάση τις σχέσεις:

$$\alpha = \frac{M \cdot \alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad \beta = \frac{M \cdot \beta}{\alpha + \beta + \gamma} \qquad \gamma = \frac{M \cdot \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα, βρίσκουμε ότι:

Η α' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \cdot 4}{4 + 6 + 10} = 3.000$ €

Η β' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \cdot 6}{4 + 6 + 10} = 4.500$ €

Η γ' οικογένεια θα πάρει: $\dfrac{15.000 \cdot 10}{4 + 6 + 10} = 7.500$ €

3.2.3. Μερισμός σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών

Πρόβλημα 1ο. Να μεριστεί ο αριθμός 250.000 σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1/2, 3/4, 5/6.

Λύση. Μ = 250.000, α = 1/2, β = 3/4, γ = 5/6.

Για να βρούμε το άθροισμα α + β + γ, τρέπουμε τα ετερώνυμα κλάσματα 1/2, 3/4, 5/6 στα ισοδύναμα ομώνυμα 6/12, 9/12, 10/12, οπότε:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{6}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{25}{12}$$

Μερίζουμε κατόπιν τον αριθμό 250.000 ανάλογα προς τα ομώνυμα κλάσματα 6/12, 9/12, 10/12.

Εφαρμόζοντας τώρα τον πρακτικό κανόνα μερισμού έχουμε:

$$\frac{250.000\cdot\frac{6}{12}}{\frac{25}{12}}=\frac{250.000\cdot 6}{25}=60.000$$

$$\frac{250.000\cdot\frac{9}{12}}{\frac{25}{12}}=\frac{250.000\cdot 9}{25}=90.000$$

$$\frac{250.000\cdot\frac{10}{12}}{\frac{25}{12}}=\frac{250.000\cdot 10}{25}=100.000$$

Σύνολο: 250.000 = Μ

Από τη λύση του πιο πάνω προβλήματος συμπεραίνουμε ότι: **Για να μερίσουμε έναν αριθμό Μ σε μέρη ανάλογα κλασματικών αριθμών, τρέπουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα ομώνυμα και έπειτα μερίζουμε τον αριθμό Μ ανάλογα προς τους αριθμητές των ομώνυμων κλασμάτων.**

Πρόβλημα 2ο. Ένας θείος άφησε στους ανεψιούς του Α, Β, Γ 6.000.000 €. Στη διαθήκη του όρισε ότι ο Α θα πάρει τα 2/ 5 των χρημάτων, ο Β το 1/3 και ο Γ τα υπόλοιπα. Πόσα χρήματα θα πάρει ο κάθε ανεψιός;

Λύση. $M=6.000.000, \quad \alpha=\frac{2}{5}, \quad \beta=\frac{1}{3}, \quad \gamma=;$

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{6}{15}+\frac{5}{15}=\frac{11}{15} \qquad \text{Άρα: } \gamma=\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$$

Άρα: Ο Α θα πάρει τα $\frac{6}{15}$ των χρημάτων.

Ο Β θα πάρει τα $\frac{5}{15}$ των χρημάτων.

Ο Γ θα πάρει τα $\frac{4}{15}$ των χρημάτων.

Εφαρμόζοντας τον πιο πάνω κανόνα βρίσκουμε ότι:

Ο Α θα πάρει: $\frac{6.000.000 \cdot 6}{15} = 2.400.000$ €

Ο Β θα πάρει: $\frac{6.000.000 \cdot 5}{15} = 2.000.000$ €

Ο Γ θα πάρει: $\frac{6.000.000 \cdot 4}{15} = 1.600.000$ €

Σύνολο: 6.000.000 €

Πρόβλημα 3ο. Ένας πατέρας όρισε στη διαθήκη του να μοιραστεί η περιουσία του στα παιδιά του α, β, γ, ηλικίας 10, 12 και 15 χρονών, σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα με τις ηλικίες τους. Η περιουσία του ήταν 600 στρέμματα˙ πόσα στρέμματα θα πάρει το κάθε παιδί;

Λύση. Ο μερισμός ενός αριθμού Μ σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τους αριθμούς α, β, γ, ανάγεται στο μερισμό του Μ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς 1/α, 1/β, 1/γ, οι οποίοι είναι αντίστροφοι των αριθμών α, β, γ.

Οι αντίστροφοι των αριθμών 10, 12, 15, που εκφράζουν τις ηλικίες των παιδιών, είναι 1/10, 1/12, 1/15.

Ο αριθμός Μ = 600 στρέμματα θα μεριστεί ανάλογα προς τα κλάσματα 1/10, 1/12, 1/15, τα οποία εάν τραπούν σε ομώνυμα είναι: 6/60, 5/60, 4/60. Συνεπώς, τα 600 στρέμματα θα μοιραστούν ανάλογα προς τους αριθμούς 6, 5, 4. Είναι 6 + 5 + 4 = 15. Εφαρμόζοντας τον πρακτικό κανόνα βρίσκουμε ότι:

Το α′ παιδί 0α πάρει: $\frac{600 \cdot 6}{15} = 240$ στρέμματα

Το β′ παιδί θα πάρει: $\frac{600 \cdot 5}{15} = 200$ στρέμματα

Το γ′ παιδί θα πάρει: $\frac{600 \cdot 4}{15} = 160$ στρέμματα

Σύνολο: 600 στρέμματα

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο σε ηλικία παιδί πήρε τα περισσότερα στρέμματα, ενώ το μεγαλύτερο παιδί πήρε τα λιγότερα στρέμματα. Τούτο οφείλεται στο ότι η περιουσία μοιράστηκε σε μέρη αντιστρόφως ανάλογα προς τις ηλικίες των παιδιών.

3.3. Προβλήματα Εταιρείας

3.3.1. Βασικές έννοιες

Για την οργάνωση και τη διοίκηση μιας σύγχρονης επιχείρησης, δεν επαρκεί μόνο η προσωπική εργασία και η εποπτεία ενός ατόμου· χρειάζεται η συμβολή περισσότερων ατόμων. Γι’ αυτό το λόγο, δύο ή περισσότεροι άνθρωποι ενώνουν τα χρήματά τους, για να κάνουν μαζί μια εμπορική, βιομηχανική, κτλ. επιχείρηση, η οποία ονομάζεται **Εταιρεία.** Τα πρόσωπα που συμμετέχουν σε μια εταιρεία ονομάζονται **εταίροι** ή **συνεταίροι.** Τα χρηματικά ποσά που καταθέτουν οι συνεταίροι στην εταιρεία λέγονται **κεφάλαια,** γιατί είναι χρηματικά ποσά που έχουν παραγωγική ικανότητα.

Οι εμπορικές εταιρείες διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

1) Προσωπικές εταιρείες: Προσωπικές εταιρείες είναι οι **ομόρρυθμες** και οι **ετερόρρυθμες** εταιρείες.

2) Κεφαλαιουχικές εταιρείες: Οι κεφαλαιουχικές εταιρείες είναι ο πιο συνηθισμένος εταιρικός τύπος και ονομάζονται **ανώνυμες εταιρείες.** Οι συνεταίροι μιας ανώνυμης εταιρείας ονομάζονται **μέτοχοι,** διότι το κεφά-